【15】

氏名	西尾真喜子（にしおまきこ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博第4号
学位授与の日付	昭和36年3月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**On polynomial approximation for strictly stationary processes** （強定常確率過程の多項式近似について）
論文調査委員	（主査）教授 伊藤　清　教授 小堀　憲　教授 小松醇郎

論文内容の要旨

主論文は強定常確率過程を Wiener 過程の増分の多項式によって近似する問題である。$B(t)$, $-\infty<t<+\infty$, を Wiener 過程とし，区間 $\Delta=(t_1,t_2]$ に対する B(t) の増分 $B(t_2)$-$B(t_1)$ を $B(\Delta)$ であらわし $\Delta+t=(t_1+t,t_2+t]$ とおくと

$$p(t)=\sum_{(i)} a_{i_1 i_2\cdots i_n} B(\Delta_{i_1}+t)B(\Delta_{i_2}+t)\cdots B(\Delta_{i_n}+t)$$

は強定常過程になるが，これを著者は polynomial process とよんでいる。任意の平均連続強定常過程 $x(t)$ に対して適当な polynomial process の列 $p_n(t)$ を求めて，$p_n(t)$, $-\infty<t<\infty$, の分布法則が $x(t)$, $-\infty<t<\infty$ の分布法則の極限となるようにできることを示すのが主論文の目的である。

証明は二段階に分かれ，はじめに $x(t)$ がエルゴード性をもつものを polynomial process の列で近似し，次に一般のものをエルゴード性をもつもので近似するのである。証明に当って Wiener 過程 $B(t)$ が定義されている確率空間 Ω の上に保測変換 T_t が $B(\Delta,T_t\omega)=B(\Delta+t,\omega)$ を満たすように定義されていると考えても一般性を失わない。

$S(\omega)=\{t:|B(t+l,\omega)-B(t-l,\omega)|>1\}$ なる集合は開区間の直和として $S(\omega)=\Sigma I_l(\omega)$ の形にあらわされるが，特に $I_l(\omega)$ のうち長さが n より大きく，しかも$(-n,\infty)$に含まれているものだけをとり，その和を $S_n(\omega)$ とし，$a_n(\omega)=n+\inf\{t:t\varepsilon S_n(\omega)\}$ と定義する。$a_n(\omega)$ はn が大きくなるにつれて次第に一様に分布して行き，しかも n とともに大きくなって行く t- 区間において $a_n(T_t\omega)=a_n(\omega)-t$ が 1 に近い確率でなりたつようになる。一方において与えられた強定常過程$x(t)$, $-\infty<t<+\infty$,がエルゴード性をもつことにより，その適当な見本過程 $x(t,\omega^*)$ は時間をずらすことによってあらゆる見本過程の縮図を与えることになる。実はほとんどすべての見本過程がこの性質をもっているのである。この見本過程の t-変数を上の $a_n(\omega)$ でおきかえて $y_n(t,\omega)=x(a_n(T_t\omega),\omega^*)$ とおくと，上にのべた $a_n(\omega)$とが $x(t,\omega^*)$ の性質を用い，$y_n(t,\omega)$ が $x(t,\omega)$を法則的に近似することがわかる。また $x(a_n(\omega),\omega^*)$ を Wiener の方法により $\Sigma_{(i)}\, a_{i_1 i_2\cdots i_n}B(\Delta_{i_1})B(\Delta_{i_2})\cdots B(\Delta_{i_n})$で近似することができるから，$y_n(t,\omega)$は polynomial process で近似でき

ることになり，これで第一段階の証明が終る。この証明の考え方の萌芽は既に Wiener の有名な論文 The homogeneous chaos(1938) にあらわれているが，この論文はきわめて難解で，その後20年来誰も理解した者もなかったのを，著者が上述のような鮮やかな方法でその謎を解明したのである。

第二段で一般のものをエルゴード性をもつもので近似するには，エルゴード理論における Oxtoby-Ulam-Halmos の近似定理の考えを利用して巧みに困難な点をのりこえている。この点は Wiener の研究には全く触れていない新しい結果である。

なお最後に，定常系列についても同様の定理がなりたつこと，ガウス型の場合には一次式近似が可能であることを注意している。

参考論文１はルベーグ積分を彷徨リーマン和で近似する問題である。一般にルベーグ可積分な関数はきわめて複雑なもので，その積分をリーマン和で近似することはできないが，分点を無作為にとると不都合な点がさけられ，いくらでも１に近い確率でリーマン和がルベーグ積分に近づくのである。彷徨分点として独立な一様分布の分点をとることが従来行なわれていたが，著者はポアソン過程の飛躍点を利用してこの近似定理を証明している。

参考論文２も同じ思想のもので，彷徨リーマン和を確率積分に応用している。確率積分の従来の定義が階段関数の場合と一般の場合との二段に分ける必要のあったのを，著者は彷徨リーマン和によって，この必要をなくし，確率積分の意味を一層明らかにした。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

強定常過程を Wiener 過程の増分の多項式で近似する問題は 1938 年 N.Wiener が有名な論文 The homogeneous chaos でエルゴード性の仮定の下に取り扱っているが，この論文はきわめて難解なもので，Cameron, Martin などによってその前半の部分は1950年前後にわかりやすい形にかきかえられた。しかしこの近似定理だけはその証明が難解でこの方面の専門家の間でも謎とされていた。

著者はこの Wiener の証明を精細に検討した結果，その中に非常に独創的な考えが含まれていることに気づき，これを整理してついに主論文に示すような鮮やかな証明に到達し，これで Wiener のいわゆる homogeneous chaos は誰でもわかる形になったので，強定常過程の本質の解明に寄与する所きわめて大きい。

著者はさらにエルゴード理論における Oxtoby-Ulam-Halmos の近似理論を応用して，Wiener が仮定したエルゴード性は必要でないことを示した。

定常過程の研究は従来弱定常過程を取り扱つたものが多く，それは関数解析における線型問題に帰着されてしまって，確率論的興味が少ない，真に確率論的様相を示す強定常過程に関するものとしては Birkhoff の個別エルゴード定理に関係したものがわずかにあり，Wiener の近似理論が興味あるものを含んでいるということは期待されながらこれを解明する人もなく20年もすぎたのであるが，著者の主論文はこれに終止符を打ったといえる。しかもこの研究は最近重要性を増しつつある確率過程の非線型予報の問題の第一歩となるものである。

参考論文１はポアソン過程の飛躍点を分点とするリーマン和の極限としてルベーグ積分が定義できることを示したもので，無作為性の意味を知る好例である。

参考論文２は同じ考えを確率積分に応用したもので，これにより確率積分の新しい巧妙な定義を与えた

ものとして注目される。

これを要するに主論文は強定常過程の理論に重要な貢献をなし，また参考論文２編はともに，著者が確率論特有の興味ある現象に対してすぐれた感覚をもっていることを示している。したがって，この論文は理学博士の学位論文として価値があるものと認める。

〔主 論 文 公 表 誌〕

Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol.12 (1960), No.2

〔参 考 論 文〕

1. Note on Random Riemann Sum
   (彷徨リーマン和について)
   公表誌 Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol.9 (1957), No.4
2. On a New Definition of Stochastic Integral by Random Riemann Sum
   (彷徨リーマン和による確率積分の定義について)
   公表誌 Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A, Vol.31 (1958), No.1